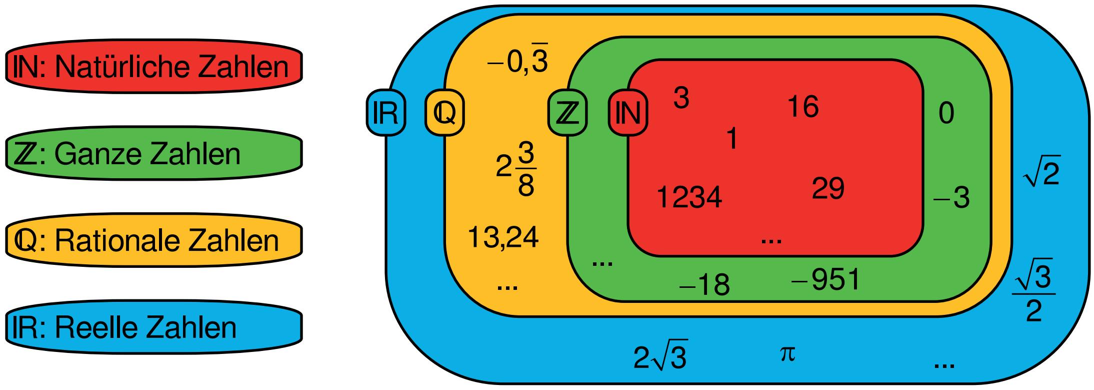
Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 9 (I)

Inhaltsverzeichnis

Stand: 28.06.2022

Reelle Zahlen

1 Zahlenmengen



2 Definition der Wurzel bzw. Quadratwurzel

$\sqrt{a}$ ist eine nichtnegative, reelle Lösung der Gleichung $x^2 = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Beispiel: $\sqrt{16} = 4$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 = 16$.

Für die Quadratwurzel $\left(\sqrt[2]{a} \text{ oder } \sqrt{a}\right)$ gilt:

allgemein	Beispiel
$\sqrt{a}\ ;\ a \in \mathbb{R}_0^+$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{a}$ ist eine positive reelle Zahl, für die gilt: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$	$\sqrt{2}$ ist eine positive reelle Zahl, für die gilt: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}^2 = 2$
Man spricht: „(Quadrat-)Wurzel aus a“.	Man spricht: „(Quadrat-)Wurzel aus 2“.

Für die Lösung der Gleichung $x^2 = a$ $(G = \mathbb{R})$ gilt: $x = \sqrt{a}$ oder $x = -\sqrt{a}$ $\left(a \in \mathbb{R}_0^+\right)$.

Beispiele:

a) $x^2 = 9$ $\qquad G = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{9} = 3$ oder $x = -\sqrt{9} = -3$ $\qquad L = \{-3\ ;\ 3\}$

b) $x^2 = 6$ $\qquad G = \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{6}$ oder $x = -\sqrt{6}$ $\qquad L = \{-\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{6}\}$

3 Rechnen mit Quadratwurzeln

Alle Rechengesetze und Regeln, die für rationale Zahlen gelten, behalten ihre Gültigkeit!

allgemein	**Beispiel**
Für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt:	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21}$
$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\ (b > 0)$	$\sqrt{32} : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{4} = 2$
$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$	$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$
Vorsicht: $\sqrt{a^2} = \sqrt{\lvert a\rvert^2} = \lvert a\rvert$ für $a \in \mathbb{R}$	Vorsicht: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{\lvert -3\rvert^2} = \lvert -3\rvert = 3$

Anwendungen:

a) **Teilweises Radizieren**

$$\sqrt{72a^3} = \sqrt{2 \cdot 36 \cdot a^2 \cdot a} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{2} \cdot 6 \cdot a \cdot \sqrt{a} = 6a\sqrt{2a} \quad \left(a \in \mathbb{R}_0^+\right)$$

b) **Nenner rational machen**

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Zentrische Streckung

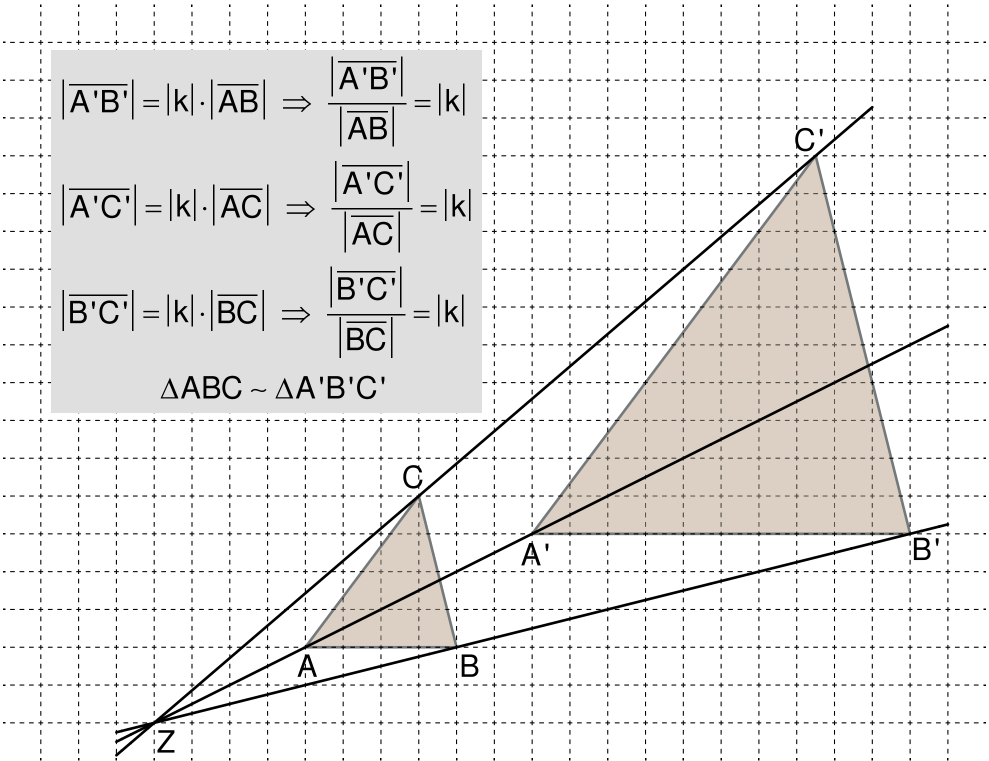
1 Die zentrische Streckung und ihre Eigenschaften

Eigenschaften: $P \xmapsto{Z;k} P'$ Streckungszentrum Z; Streckungsfaktor k $(k \neq 0)$

- $P' \in ZP$ und $\left|\overline{ZP'}\right| = |k| \cdot \left|\overline{ZP}\right|$
- Die zentrische Streckung ist umkehrbar.
- Sie ist geraden-, kreis-, winkel- und verhältnistreu.
- Ur- und zugehörige Bildstrecken sind parallel. Dies gilt entsprechend für Ur- und zugehörige Bildgeraden.
- Das Streckungszentrum ist der einzige Fixpunkt. Alle Geraden, die durch das Streckungszentrum verlaufen, sind Fixgeraden.
- Die zentrische Streckung ist eine **Ähnlichkeitsabbildung**.

Ähnliche Figuren: Figuren, die mithilfe von zentrischen Streckungen und/oder Kongruenzabbildungen aufeinander abgebildet werden können, heißen ähnlich zueinander (Symbolschreibweise: Figur 1 ~ Figur 2).

Beispiel: $\Delta ABC \xmapsto{Z;k=2,5} \Delta A'B'C'$ $\left(\text{Umkehrabbildung: } \Delta A'B'C \xmapsto{Z;k'=\frac{2}{5}} \Delta ABC\right)$



$$\left|\overline{A'B'}\right| = |k| \cdot \left|\overline{AB}\right| \Rightarrow \frac{\left|\overline{A'B'}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} = |k|$$

$$\left|\overline{A'C'}\right| = |k| \cdot \left|\overline{AC}\right| \Rightarrow \frac{\left|\overline{A'C'}\right|}{\left|\overline{AC}\right|} = |k|$$

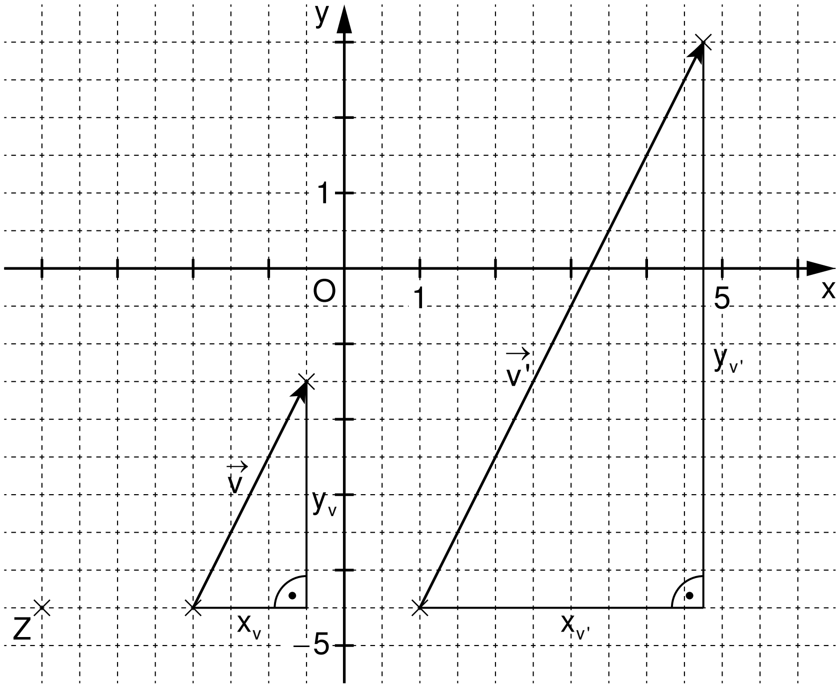
$$\left|\overline{B'C'}\right| = |k| \cdot \left|\overline{BC}\right| \Rightarrow \frac{\left|\overline{B'C'}\right|}{\left|\overline{BC}\right|} = |k|$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Zentrische Streckung von Vektoren:

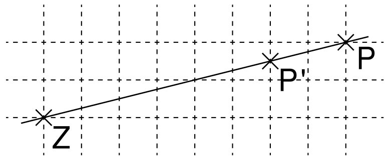
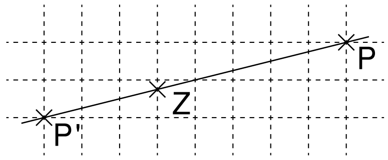
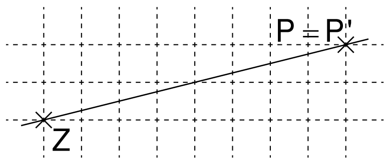
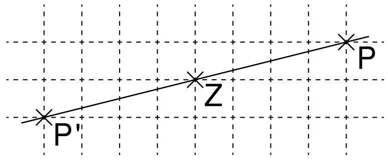
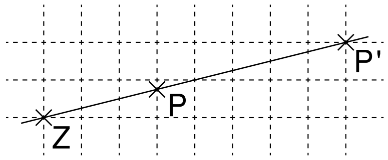
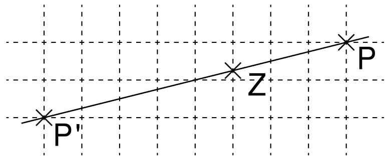
allgemein: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \xmapsto{Z;k} \vec{v'} = k \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_v \\ k \cdot y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{v'} \\ y_{v'} \end{pmatrix}$

Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \xmapsto{Z;k=2{,}5} \vec{v'} = 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \cdot 1{,}5 \\ 2{,}5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}75 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$



Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 9 (I)

Der Wert des Streckungsfaktors beeinflusst die Lage des Bildpunktes:

Streckungsfaktor k / Betrag des Streckungsfaktors k	ist positiv *Z liegt nicht zwischen P und P‘*	ist negativ *Z liegt zwischen P und P‘*
ist kleiner als 1 $\lvert\overline{ZP'}\rvert < \lvert\overline{ZP}\rvert$	 mögliche Werte für k: $0{,}5\,;\,\frac{2}{5}\,;\,\ldots$	 mögliche Werte für k: $-0{,}5\,;\,-\frac{2}{5}\,;\,\ldots$
ist gleich 1 $\lvert\overline{ZP'}\rvert = \lvert\overline{ZP}\rvert$	 $k = 1$	 $k = -1$ (Punktspiegelung)
ist größer als 1 $\lvert\overline{ZP'}\rvert > \lvert\overline{ZP}\rvert$	 mögliche Werte für k: $1{,}5\,;\,3\,;\,\ldots$	 mögliche Werte für k: $-1{,}5\,;\,-3\,;\,\ldots$

Für den **Flächeninhalt** zentrisch gestreckter Bildfiguren gilt:

Wenn $\text{Figur } F \xmapsto{Z;\,k} \text{Figur } F'$, dann gilt: $A_{F'} = k^2 \cdot A_F$.

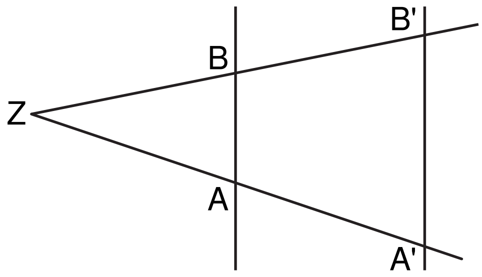
Beispiel: Dreieck ABC mit $A_{\Delta ABC} = 4\text{ cm}^2$ und $\Delta ABC \xmapsto{Z;\,k=3} \Delta A'B'C'$

$\Rightarrow \quad A_{\Delta A'B'C'} = 3^2 \cdot 4\text{ cm}^2 = 36\text{ cm}^2$

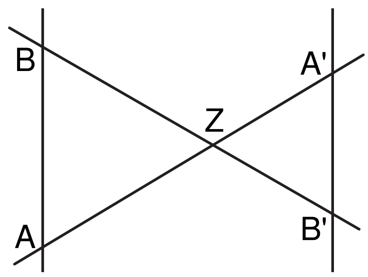
2 Strahlensätze

$$\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZA'}|}=\frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{ZB'}|}$$

$$\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZA'}|}=\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|}$$



$AB \parallel A'B'$

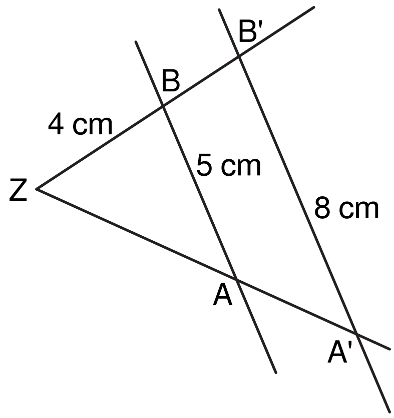


Anwendungen:

a) Streckenlängen berechnen $(AB \parallel A'B')$

$$\frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}=\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\overline{ZB'}|}{4\text{ cm}}=\frac{8\text{ cm}}{5\text{ cm}}$$

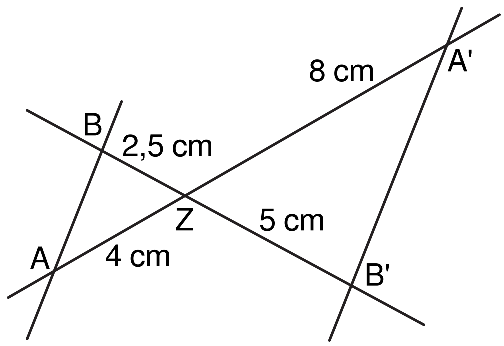
$$\Leftrightarrow \quad |\overline{ZB'}| = 6{,}4\text{ cm}$$



b) Nachweis der Parallelität zweier Geraden

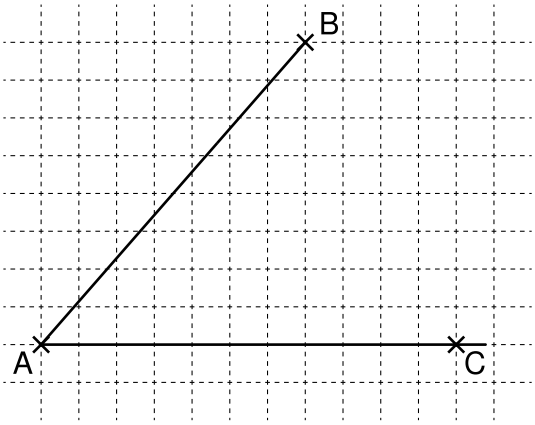
$$\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{ZA'}|}=\frac{4\text{ cm}}{8\text{ cm}}=0{,}5=\frac{2{,}5\text{ cm}}{5\text{ cm}}=\frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{ZB'}|}$$

$$\Leftrightarrow \quad AB \parallel A'B'$$

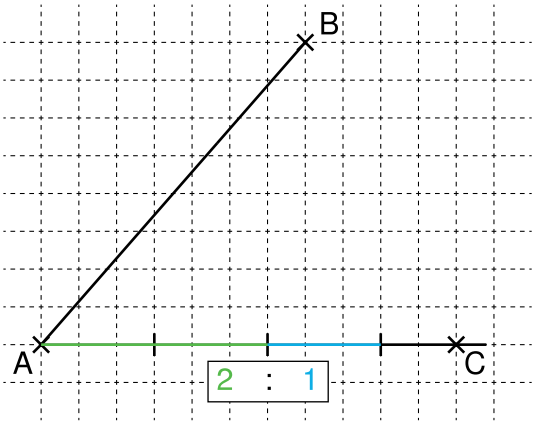


c) Strecke teilen

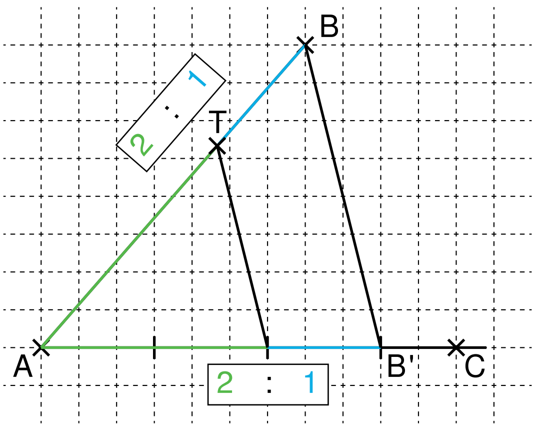
Beispiel: Teilen der Strecke $\overline{AB}$ mithilfe eines Punktes T, so dass gilt: $|\overline{AT}|:|\overline{TB}| = 2:1$.



1. Schritt:
Zeichnen einer Halbgerade $[AC$



2. Schritt:
Abtragen von $2+1=3$ gleich langen Teilstrecken auf der Halbgerade $[AC$, beginnend bei A

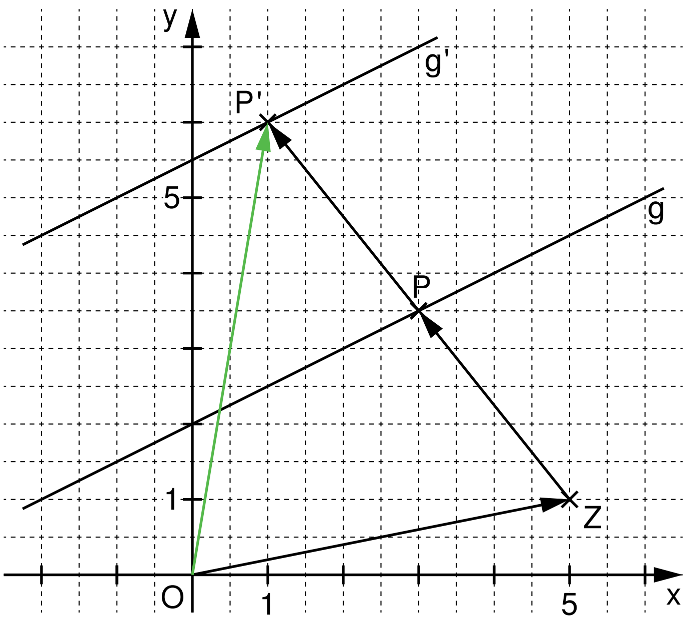


3. Schritt:
Verbinden des Punktes B mit dem durch den letzten Teilstrich auf der Halbgerade $[AC$ festgelegten Punkt B'

4. Schritt:
Einzeichnen einer zur Strecke $\overline{BB'}$ parallelen Strecke durch den Punkt auf der Halbgerade $[AC$, der die Strecke $\overline{AB'}$ im Verhältnis $2:1$ teilt

3 Parameterverfahren (Abbildung von Funktionsgraphen)

Beispiel: $g\colon y = 0{,}5x + 2 \xmapsto{Z(5|1);\,k=2} g'$ bzw. $P\left(x \,\middle|\, 0{,}5x+2\right) \in g \xmapsto{Z(5|1);\,k=2} P'\left(x' \,\middle|\, y'\right) \in g'$



$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OZ} \oplus \overrightarrow{ZP'}$$

$$= \overrightarrow{OZ} \oplus \, k \cdot \overrightarrow{ZP}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus 2 \cdot \begin{pmatrix} x-5 \\ 0{,}5x+2-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2x-10 \\ x+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-5 \\ x+3 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} x' = 2x - 5 \\ \wedge\, y' = x + 3 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x = \boxed{0{,}5x' + 2{,}5}$$

$$\Rightarrow y' = \boxed{0{,}5x' + 2{,}5} + 3$$

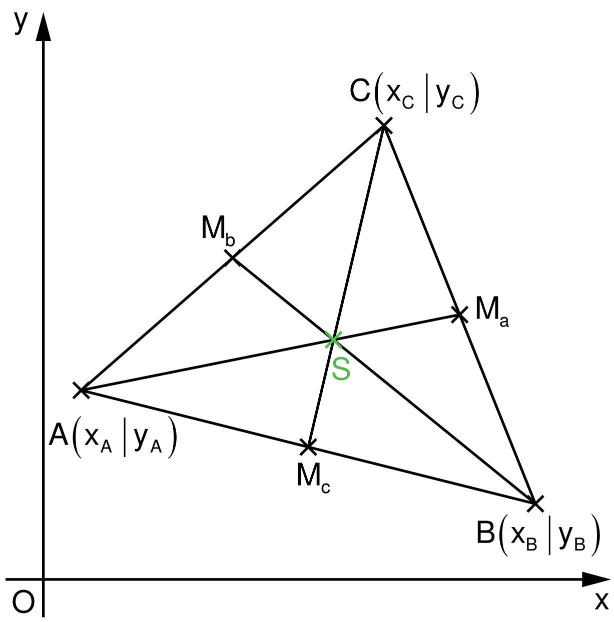
$$\Rightarrow g'\colon\ y = 0{,}5x + 5{,}5$$

4 Schwerpunkt im Dreieck

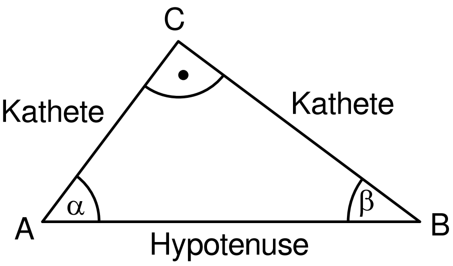
Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck heißt Schwerpunkt S des Dreiecks.

Für die Koordinaten des Schwerpunkts S im Dreieck ABC gilt:

$$S\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} \,\middle|\, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$



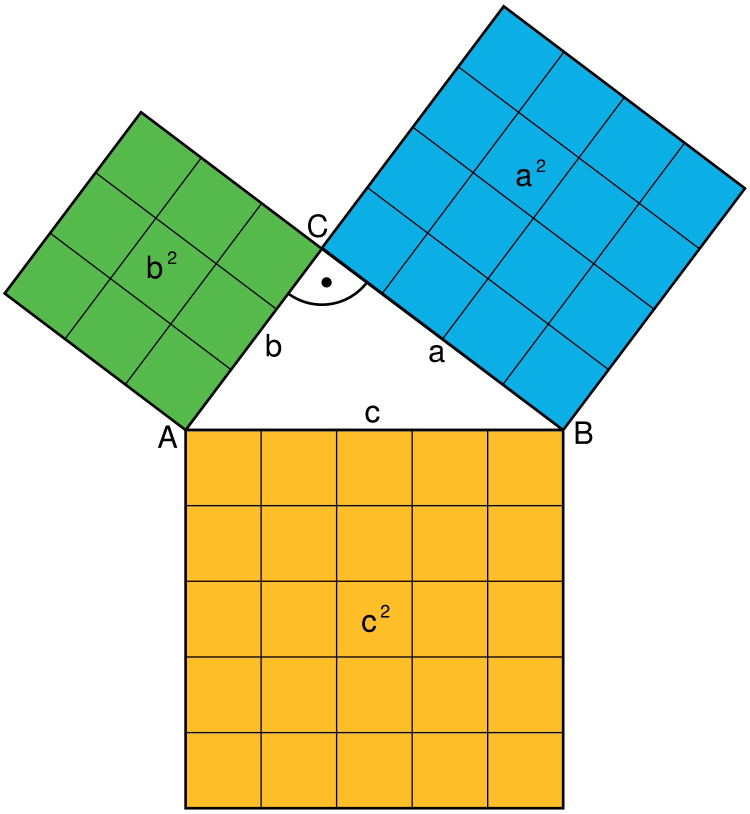
Rechtwinklige Dreiecke



1 Satz des Pythagoras

Ist ein Dreieck ABC rechtwinklig bei C, dann gilt: $c^2 = a^2 + b^2$.

Umkehrung:
Gilt in einem Dreieck ABC $c^2 = a^2 + b^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig bei C.



Beispiele:

a) Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Längen der Katheten: $a = 4\text{ cm}$ und $b = 3\text{ cm}$.

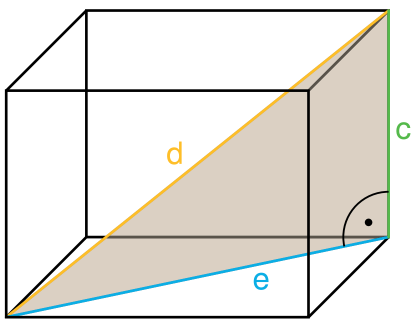
Für die Länge der Hypotenuse gilt:
$$\begin{aligned} c^2 &= (4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 \\ &= 16\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2 \\ &= 25\text{ cm}^2 \qquad \Rightarrow \quad c = 5\text{ cm} \end{aligned}$$

b) Das Dreieck DEF hat die Seitenlängen $|\overline{DE}| = 5\text{ cm}$, $|\overline{EF}| = 12\text{ cm}$ und $|\overline{DF}| = 13\text{ cm}$.

$$\begin{aligned} |\overline{DE}|^2 + |\overline{EF}|^2 &= 25\text{ cm}^2 + 144\text{ cm}^2 \\ &= 169\text{ cm}^2 \\ &= (13\text{ cm})^2 \\ &= |\overline{DF}|^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Das ΔDEF ist rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{DF}$.

c)



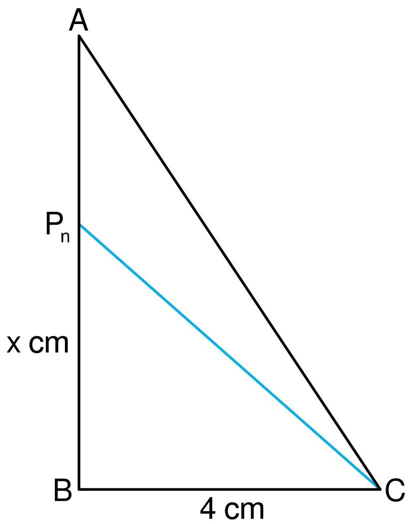
Im Quader gilt: $e = 5\text{ cm}$ und $c = 3\text{ cm}$.

$$\begin{aligned} d^2 &= e^2 + c^2 \\ &= (5\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 \\ &= 34\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad d = 5{,}83\text{ cm}$

(d ist die Länge der Raumdiagonale des Quaders.)

d) Funktionale Abhängigkeit bei Strecken



Gegeben: $|\overline{BC}| = 4\text{ cm}$; $|\overline{BP_n}|(x) = x\text{ cm}$ $(x \in \mathbb{IR}^+)$

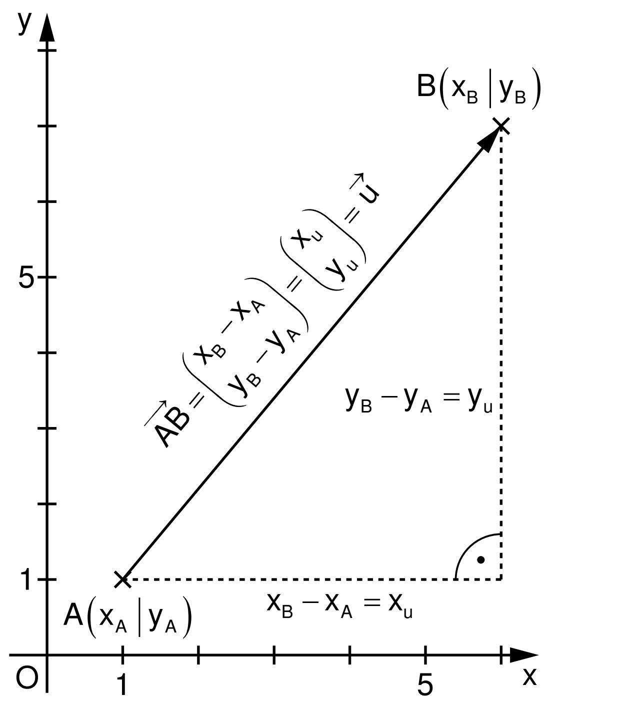
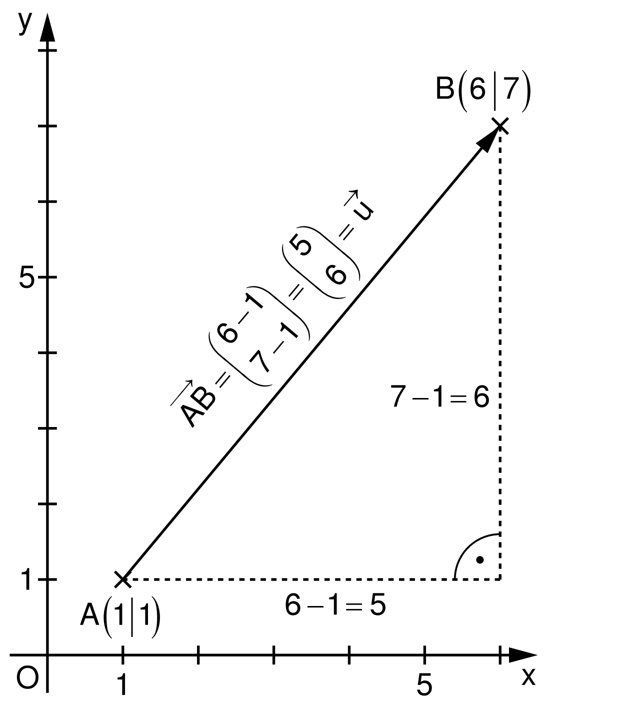
$$|\overline{CP_n}|^2 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{BP_n}|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\overline{CP_n}|(x) = \sqrt{4^2 + x^2}\text{ cm} = \sqrt{16 + x^2}\text{ cm}$$

z. B. gilt für die Stecke $\overline{CP_1}$ mit $x = 3$:

$$\begin{aligned} |\overline{CP_1}| &= \sqrt{16 + 3^2}\text{ cm} \\ &= \sqrt{25}\text{ cm} \\ &= 5\text{ cm} \end{aligned}$$

Im Koordinatensystem werden mithilfe des Satzes des Pythagoras Längen von Strecken bzw. die Beträge von Vektoren bestimmt:

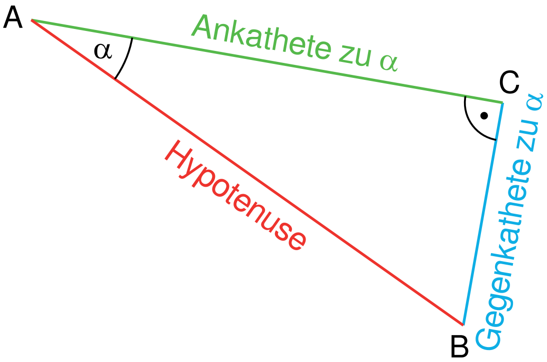
allgemein	**Beispiel**
	
Länge der Strecke $\overline{AB}$: $\lvert\overline{AB}\rvert = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ LE Betrag des Pfeils $\overrightarrow{AB}$ bzw. des Vektors $\vec{u}$: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{x_u^{\,2} + y_u^{\,2}}$	Länge der Strecke $\overline{AB}$: $\lvert\overline{AB}\rvert = \sqrt{(6-1)^2 + (7-1)^2}$ LE $= \sqrt{5^2 + 6^2}$ LE $= \sqrt{61}$ LE Betrag des Pfeils $\overrightarrow{AB}$ bzw. des Vektors $\vec{u}$: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{u}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\vec{u}\rvert = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$

2 Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck

$$\sin\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete zu }\alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Länge der Ankathete zu }\alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

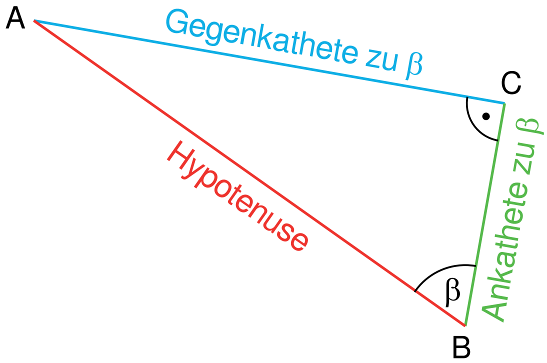
$$\tan\alpha = \frac{\text{Länge der Gegenkathete zu }\alpha}{\text{Länge der Ankathete zu }\alpha}$$



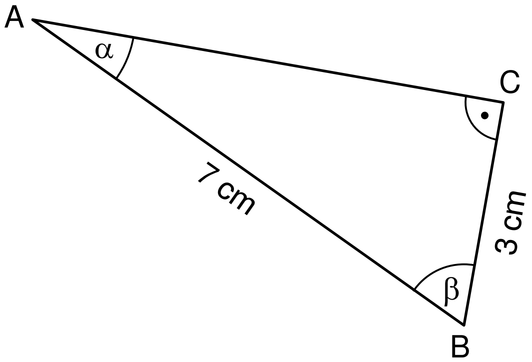
$$\sin\beta = \frac{\text{Länge der Gegenkathete zu }\beta}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\cos\beta = \frac{\text{Länge der Ankathete zu }\beta}{\text{Länge der Hypotenuse}}$$

$$\tan\beta = \frac{\text{Länge der Gegenkathete zu }\beta}{\text{Länge der Ankathete zu }\beta}$$



Beispiel:



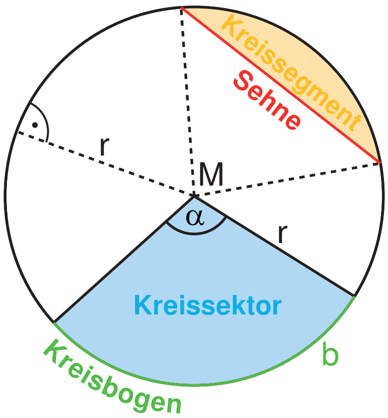
(1) $\sin\alpha = \frac{3\text{ cm}}{7\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 25{,}38°$

(2) $\beta = 180° - 90° - 25{,}38° = 64{,}62°$

oder

$\cos\beta = \frac{3\text{ cm}}{7\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 64{,}62°$

Kreis und Kreisteile



Im Kreis sind der Umfang (u) und der Durchmesser (d) bzw. der Flächeninhalt (A) und das Quadrat des Radius (r^2) direkt proportional zueinander.

Der Proportionalitätsfaktor ist jeweils die Kreiszahl π (sprich: Pi).

Es gilt: $\frac{u}{d} = \pi$ bzw. $u = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$

$\frac{A}{r^2} = \pi$ bzw. $A = r^2 \cdot \pi$

Näherungen für die Kreiszahl: $\pi \approx 3{,}14$ bzw. $\pi \approx \frac{22}{7}$

Für den Flächeninhalt A_{Sektor} eines Kreissektors bzw. für die Bogenlänge b eines Kreisbogens mit dem Mittelpunktswinkel α gilt:

$$A_{Sektor} = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$$

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi$$

Raumgeometrie

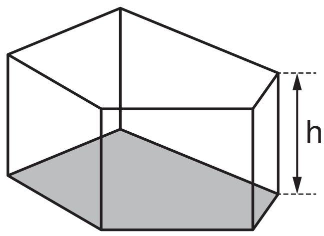
M: Inhalt der Mantelfläche
O: Inhalt der Oberfläche
V: Volumen
G: Inhalt der Grundfläche

Prisma:

$$V = G \cdot h$$

$$M = u_G \cdot h$$

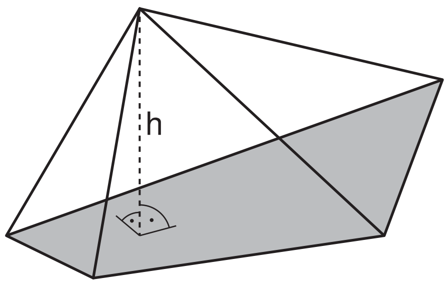
$$O = 2 \cdot G + M$$



Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$O = G + M$$

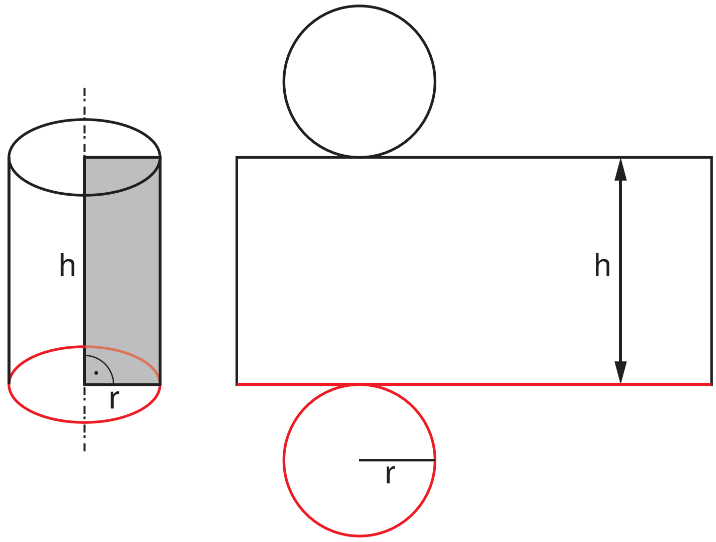


Gerader Kreiszylinder:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$$



Gerader Kreiskegel:

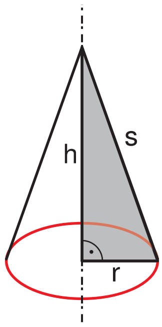
$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

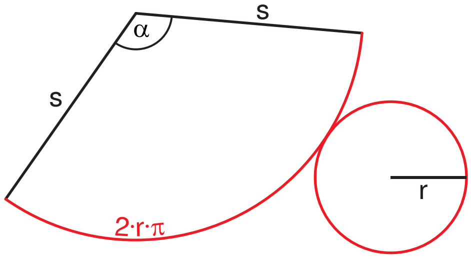
$$M = r \cdot \pi \cdot s$$

$$O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$$

$$\alpha = 360° \cdot \frac{r}{s}$$

Mittelpunktswinkel der Mantelfläche

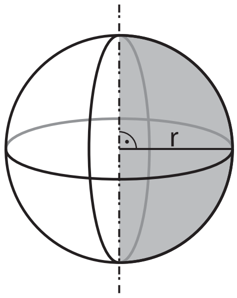




Kugel:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$



Systeme linearer Gleichungen

1 Definition

Zwei durch $\wedge$ („und zugleich") miteinander verknüpfte lineare Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem.

Beispiele $(x,y \in \mathbb{R})$:

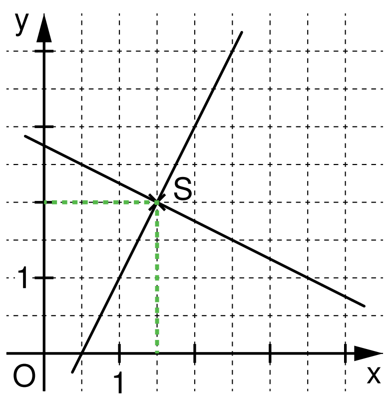
$$\begin{vmatrix} y = 2x - 1 \\ \wedge \; y = -0{,}5x + 2{,}75 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2x + 3y = 4 \\ \wedge \; x - 5y = 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} y = 0{,}5x + 4 \\ \wedge \; -2x + 3y = 0{,}7 \end{vmatrix}$$

2 Lösen von Systemen linearer Gleichungen

2.1 Graphische Lösung

$$\begin{vmatrix} y = 2x - 1 \\ \wedge \; y = -0{,}5x + 2{,}75 \end{vmatrix}$$

Lineare Gleichungen als Gleichungen linearer Funktionen mit Geraden als Graphen



Bestimmen der Lösungsmenge für $x,y \in \mathbb{R}$ durch **Ablesen des Schnittpunktes** S:

$S(1{,}5 \,|\, 2)$

$\Rightarrow L = \{(1{,}5 \,|\, 2)\}$

2.2 Algebraische (rechnerische) Lösung

Gleichsetzungsverfahren

Voraussetzung: Beide Gleichungen sind nach der gleichen Variablen aufgelöst.

$$\left| \begin{array}{ll} & \boxed{y=} -0{,}5x+2{,}75 \\ \wedge & \boxed{y=} \ 2x-1 \end{array} \right.$$

Gleichsetzen der Rechtsterme und Lösen der entstehenden Gleichung:

$$\begin{array}{lrl} & 2x-1=-0{,}5x+2{,}75 & \mid +1+0{,}5x \\ \Leftrightarrow & 2{,}5x=3{,}75 & \mid :2{,}5 \\ \Leftrightarrow & x=1{,}5 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} & x=1{,}5 \\ \wedge & y=2\cdot 1{,}5-1 \end{array} \right.$$

Berechnen der zweiten Variablen durch Einsetzen von $x=1{,}5$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} & x=1{,}5 \\ \wedge & y=2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow L=\{(1{,}5\,|\,2)\}$$

Einsetzungsverfahren

Voraussetzung: Eine Gleichung ist nach einer Variablen aufgelöst.

$$\left| \begin{array}{ll} & \boxed{y=} \ 2x-1 \\ \wedge & x+2y=5{,}5 \end{array} \right.$$

Einsetzen des Terms $2x-1$ für y und Lösen der entstehenden Gleichung:

$$\begin{array}{lrl} & x+2\cdot(2x-1)=5{,}5 & \\ \Leftrightarrow & x+4x-2=5{,}5 & \\ \Leftrightarrow & 5x-2=5{,}5 & \mid +2 \\ \Leftrightarrow & 5x=7{,}5 & \mid :5 \\ \Leftrightarrow & x=1{,}5 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} & x=1{,}5 \\ \wedge & y=2\cdot 1{,}5-1 \end{array} \right.$$

Berechnen der zweiten Variablen durch Einsetzen von $x=1{,}5$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} & x=1{,}5 \\ \wedge & y=2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow L=\{(1{,}5\,|\,2)\}$$

Additionsverfahren

Voraussetzung: In den linearen Gleichungen unterscheiden sich die Koeffizienten einer Variablen nur durch das Vorzeichen.

$$\left|\begin{array}{l} 4x \boxed{-2y =} \ 2 \\ \wedge \ x \boxed{+2y =} \ 5{,}5 \end{array}\right.$$

Jeweils Addieren der Links- bzw. Rechtsterme und Lösen der entstehenden Gleichung:

$$4x-2y+(x+2y)=2+5{,}5$$
$$\Leftrightarrow \quad 4x-2y+x+2y=7{,}5$$
$$\Leftrightarrow \quad 5x=7{,}5 \quad |:5$$
$$\Leftrightarrow \quad x=1{,}5$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=1{,}5 \\ \wedge \ 1{,}5+2y=5{,}5 \end{array}\right.$$

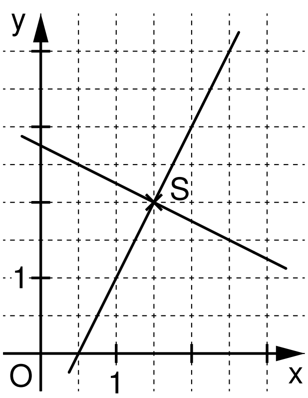
Berechnen der zweiten Variablen durch Einsetzen von $x=1{,}5$:

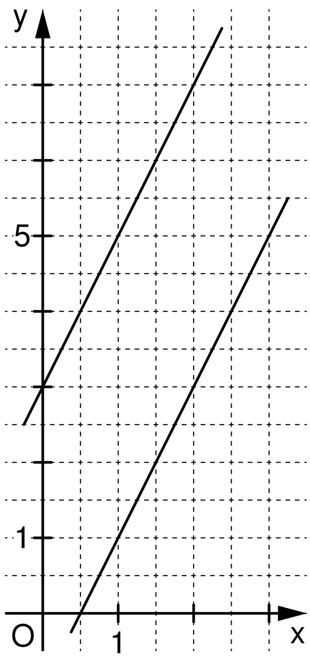
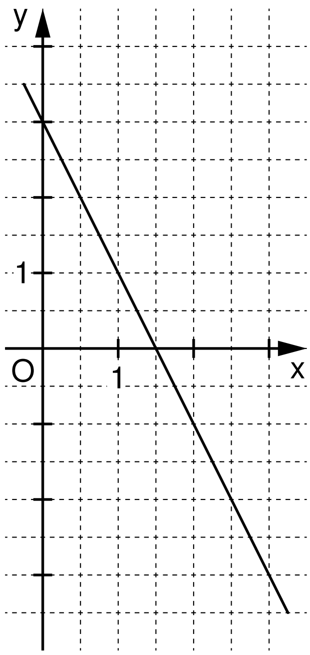
$$1{,}5+2y=5{,}5 \quad |-1{,}5$$
$$\Leftrightarrow \quad 2y=4 \quad |:2$$
$$\Leftrightarrow \quad y=2$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=1{,}5 \\ \wedge \ y=2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow L=\{(1{,}5\,|\,2)\}$$

2.3 Mögliche Lösungsmengen

Lösungsmenge	graphische Deutung	Beispiel
Es gibt <u>genau eine Belegung</u> für die Variablen x und y, so dass beide Gleichungen gelöst werden können. $L=\{(x_S\,\|\,y_S)\}$	 Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(x_S\|y_S)$.	$\left\|\begin{array}{l} y=2x-1 \\ \wedge \ y=-0{,}5x+2{,}75 \end{array}\right.$ $L=\{(1{,}5\,\|\,2)\}$

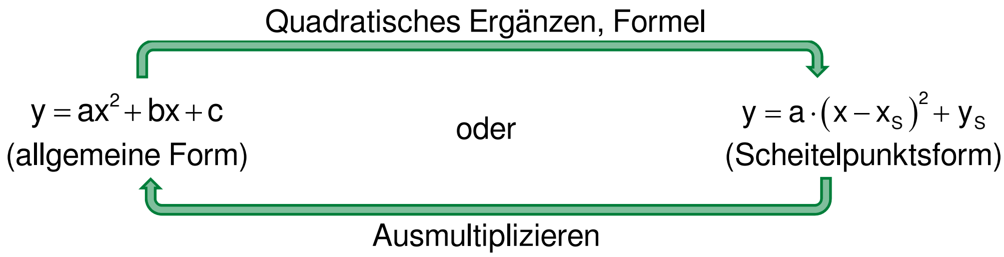
Es gibt keine Belegung für die Variablen x und y, so dass beide Gleichungen gelöst werden können. $L = \{\ \}$	 Die Geraden liegen parallel zueinander.	$\begin{array}{l} \quad y = 2x - 1 \\ \wedge \ y = 2x + 3 \end{array}$ $L = \{\ \}$
Es gibt unendlich viele Belegungen für die Variablen x und y, so dass beide Gleichungen gelöst werden können. $L = \{(x \mid y) \mid ax + by = c\}$	 Die Geraden sind identisch.	$\begin{array}{r} 6x + 3y = 9 \\ \wedge \quad 2x + y = 3 \end{array}$ $L = \{(x \mid y) \mid 6x + 3y = 9\}$

Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

1 Quadratische Funktionen

1.1 Definition

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c, x, y \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ heißen quadratische Funktionen.



1.2 Eigenschaften quadratischer Funktionen

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$

Wertemenge: $W = \{y \mid y \leq y_S\}$ für $a < 0$ und $W = \{y \mid y \geq y_S\}$ für $a > 0$

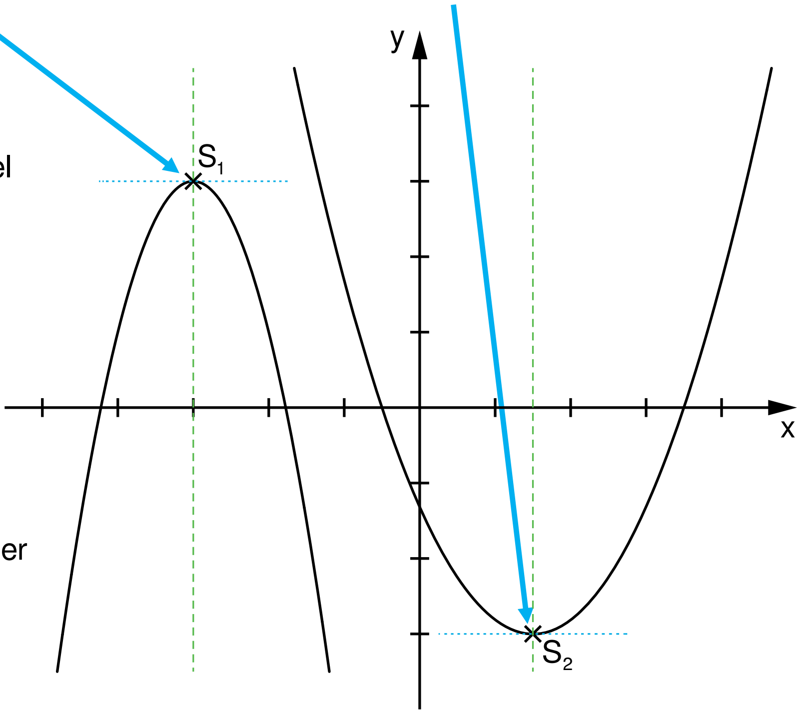
Die Graphen quadratischer Funktionen heißen **Parabeln**.

Für den **Scheitelpunkt** der Parabel folgt aus der Scheitelpunktsform bzw. der allgemeinen Form:

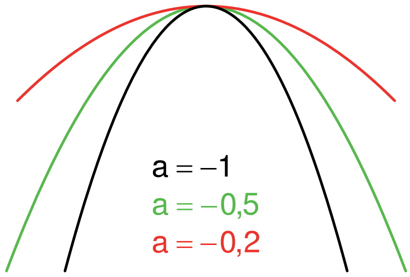
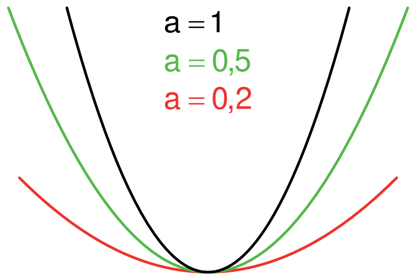
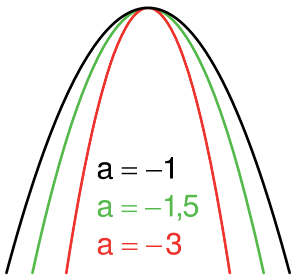
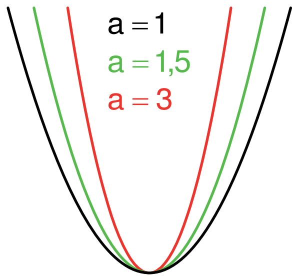
$$S(x_S \mid y_S) = S\left(\frac{-b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Parabeln sind **achsensymmetrisch**.

Gleichung der **Symmetrieachse** der Parabel: $x = x_S$.

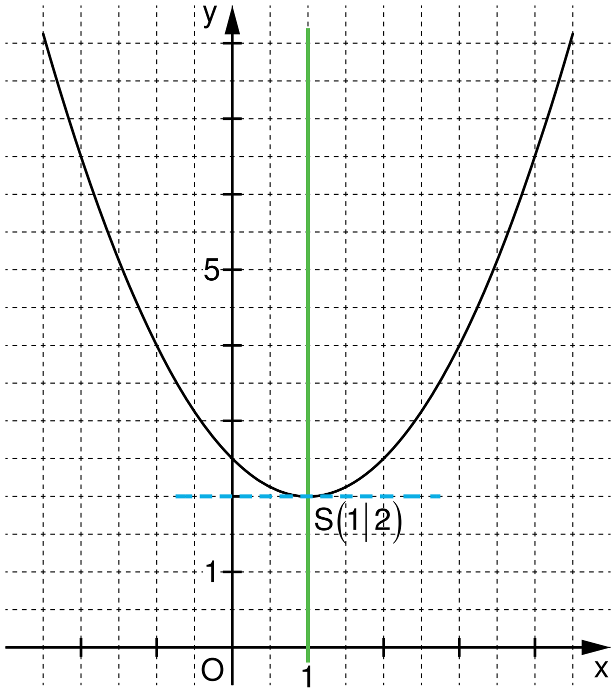


Grundlegende Inhalte Mathematik, Realschule, Jahrgangsstufe 9 (I)

	$a < 0$ (Parabel nach unten geöffnet)	$a > 0$ (Parabel nach oben geöffnet)
$\lvert a \rvert < 1$ (gestauchte Parabel)	Die gestauchte Parabel ist nach unten geöffnet und besitzt am Scheitelpunkt ein Maximum. 	Die gestauchte Parabel ist nach oben geöffnet und besitzt am Scheitelpunkt ein Minimum. 
$\lvert a \rvert > 1$ (gestreckte Parabel)	Die gestreckte Parabel ist nach unten geöffnet und besitzt am Scheitelpunkt ein Maximum. 	Die gestreckte Parabel ist nach oben geöffnet und besitzt am Scheitelpunkt ein Minimum. 

Sonderfälle: Die Parabeln mit $a = 1$ bzw. $a = -1$ heißen nach oben bzw. nach unten geöffnete **Normalparabeln**.

Beispiel:



$y = 0{,}5x^2 - x + 2{,}5$

oder

$y = 0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 2$

$D = \mathbb{R}$

$W = \{y \mid y \geq 2\}$

Symmetrieachse: $x = 1$

a) allgemeine Form → Scheitelpunktsform

Quadratische Ergänzung

$$y = 0{,}5x^2 - x + 2{,}5$$
$$y = 0{,}5 \cdot (x^2 - 2x + 5)$$
$$y = 0{,}5 \cdot (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 5)$$
$$y = 0{,}5 \cdot \left[(x-1)^2 + 4\right]$$
$$y = 0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 2$$

Formel zur Bestimmung des Scheitelpunktes

$$y = 0{,}5x^2 - x + 2{,}5$$

$a = 0{,}5$, $b = -1$, $c = 2{,}5$

$$x_S = \frac{-(-1)}{2 \cdot 0{,}5} = 1$$
$$y_S = 2{,}5 - \frac{(-1)^2}{4 \cdot 0{,}5} = 2$$
$$\Rightarrow y = 0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 2$$

b) Scheitelpunktsform → allgemeine Form

$$y = 0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 2$$
$$y = 0{,}5 \cdot (x^2 - 2x + 1) + 2$$
$$y = 0{,}5x^2 - x + 2{,}5$$

1.3 Aufstellen von Parabelgleichungen

Die Gleichung einer Parabel p kann aus gegebenen Bestimmungsstücken wie dem Scheitelpunkt, weiteren Punkten auf der Parabel sowie der Belegung der Variablen a, b oder c (allgemeine Form der Gleichung) ermittelt werden.

Ausgewählte Beispiele:

a) Gegeben sind der Scheitelpunkt $S(4|-1)$ und der Punkt $P(-2|8) \in p$.

$8 = a \cdot (-2-4)^2 - 1$	Einsetzen von P und S in die Scheitelpunktsform
$\Leftrightarrow \quad 8 = a \cdot 36 - 1 \quad \vert +1$	
$\Leftrightarrow \quad 9 = a \cdot 36 \quad \vert :36$	Lösen der linearen Gleichung
$\Leftrightarrow \quad 0{,}25 = a$	
$p\colon y = 0{,}25 \cdot (x-4)^2 - 1$	Einsetzen von a und S in die Scheitelpunktsform
$y = 0{,}25 \cdot (x^2 - 8x + 16) - 1$ $\Leftrightarrow \quad y = 0{,}25x^2 - 2x + 3$	bei Bedarf: Ermitteln der allgemeinen Form durch Ausmultiplizieren

b) Gegeben sind $a = 1{,}5$ sowie die Punkte $P(4|5) \in p$ und $Q(1|0{,}5) \in p$.

$5 = 1{,}5 \cdot 4^2 - b \cdot 4 + c$ $\wedge \quad 0{,}5 = 1{,}5 \cdot 1^2 - b \cdot 1 + c$	Aufstellen eines linearen Gleichungssystems durch Einsetzen von a, P und Q in die allgemeine Form
$\ldots$	
$\Leftrightarrow \quad b = -6 \quad \wedge \quad c = 5$	Lösen des linearen Gleichungssystems
$p\colon y = 1{,}5x^2 - 6x + 5$	Einsetzen von a, b und c in die allgemeine Form

1.4 Parabelscharen

Enthält die Gleichung einer quadratischen Funktion einen Parameter k, so erhält man eine **Parabelschar** p(k). Liegen die Scheitelpunkte aller Parabeln einer Parabelschar auf einem Graphen, so spricht man vom **Trägergraphen** t der Scheitelpunkte.

Beispiel:

$p(k): y = -1{,}5x^2 + 2kx - k \quad (k, x, y \in \mathbb{R})$

Ermittlung der Gleichung des Trägergraphen mithilfe des Parameterverfahrens:

$a = -1{,}5$
$b = 2k$
$c = -k$

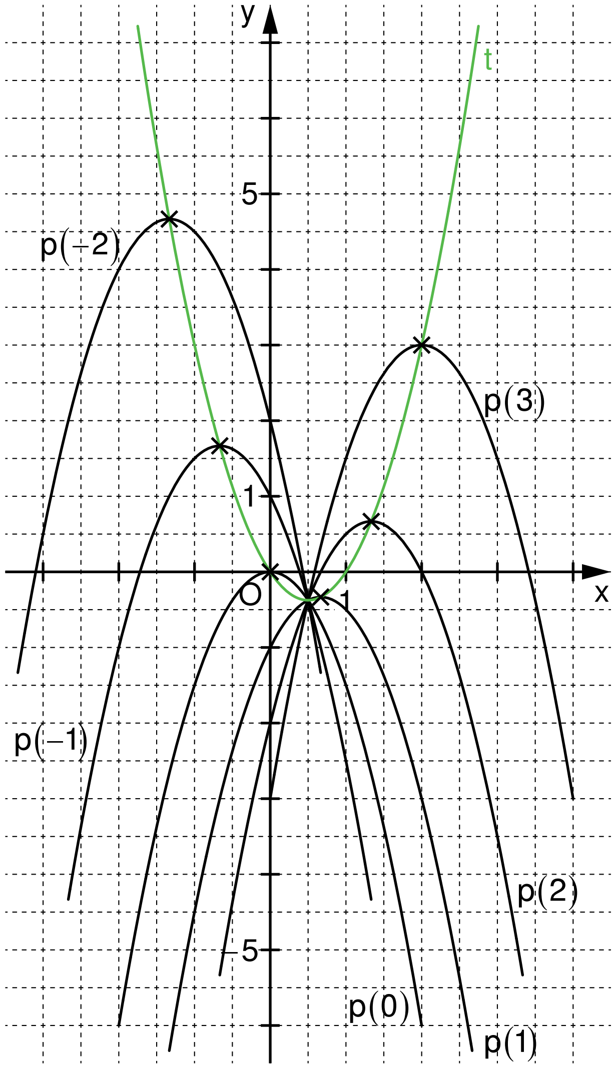
$$x_S = \frac{-(2k)}{2\cdot(-1{,}5)} = \frac{2}{3}k$$

$$y_S = -k - \frac{(2k)^2}{4\cdot(-1{,}5)} = \frac{2}{3}k^2 - k$$

$$\begin{array}{|l} x_S = \frac{2}{3}k \quad \Leftrightarrow \quad k = \boxed{1{,}5x_S} \\ \wedge\ y_S = \frac{2}{3}k^2 - k \end{array}$$

$$y_S = \frac{2}{3}\left(\boxed{1{,}5x_S}\right)^2 - \boxed{1{,}5x_S}$$

$\Rightarrow \quad t: y = 1{,}5x^2 - 1{,}5x$



2 Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c, x, y \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ heißt **quadratische Gleichung**.

2.1 Graphische Veranschaulichung

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse sind die **Nullstellen** der zugehörigen Funktion $y = ax^2 + bx + c$.

Sie lösen die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

Beispiel:

Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse:

$y = 0{,}5x^2 - 3x + 2{,}5$

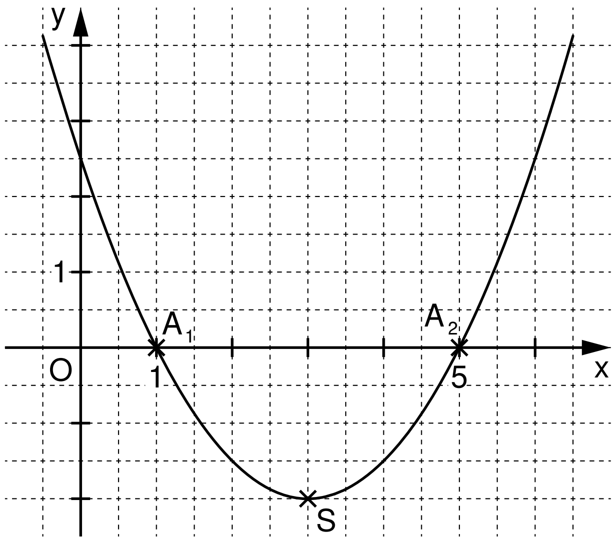
$A_1(1|0); A_2(5|0)$

Nullstellen der zugehörigen Funktion:

$0 = 0{,}5x^2 - 3x + 2{,}5$

$L = \{1; 5\}$

$x = 1$ und $x = 5$ sind die Nullstellen der zugehörigen Funktion.



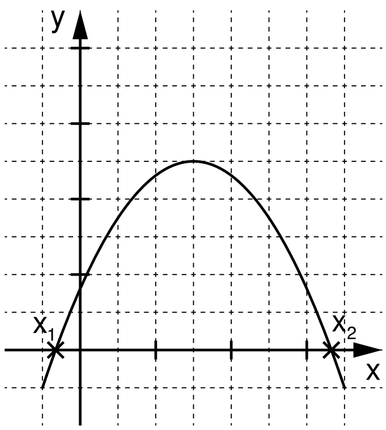
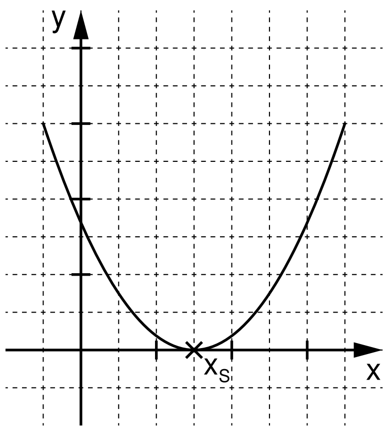
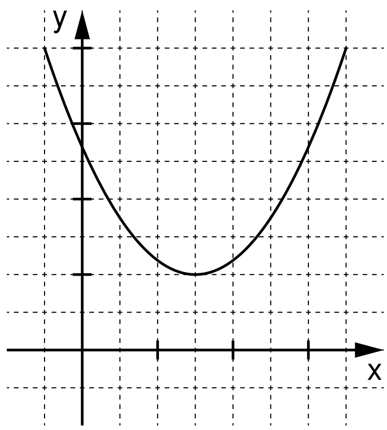
2.2 Ermitteln der Lösungsmenge

Mithilfe der **Lösungsformel** kann man die Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ ermitteln:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Der Term $b^2 - 4ac$ heißt **Diskriminante D.**

Die Lösungsmenge enthält ...

... zwei Lösungen	... eine Lösung	... keine Lösung	
$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$	
$L = \left\{ \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} ; \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \right\}$	$L = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$	$L = \{ \quad \}$	
Die Parabel schneidet die x-Achse in zwei Punkten. 	Der Scheitelpunkt $S(x_S \mid y_S)$ liegt auf der x-Achse. 	Die Parabel schneidet die x-Achse nicht. 	**graphische Veranschaulichung**
$L = \{x_1 ; x_2\}$	$L = \{x_S\}$	$L = \{ \quad \}$	

3 Systeme quadratischer Gleichungen

3.1 Definition

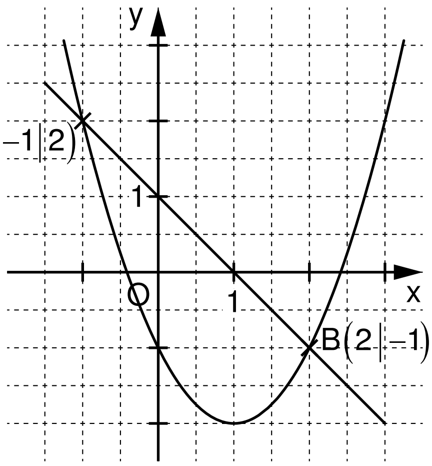
Zwei Gleichungen mit zwei Variablen bilden ein quadratisches Gleichungssystem, wenn davon mindestens eine Gleichung eine quadratische Gleichung ist.

Für die Variablen werden jeweils Grundmengen festgelegt: $x \in G_1$ und $y \in G_2$.

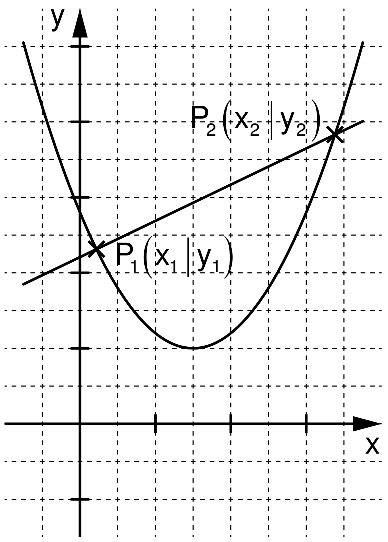
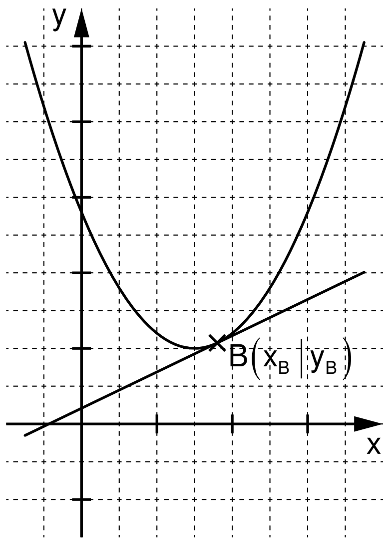
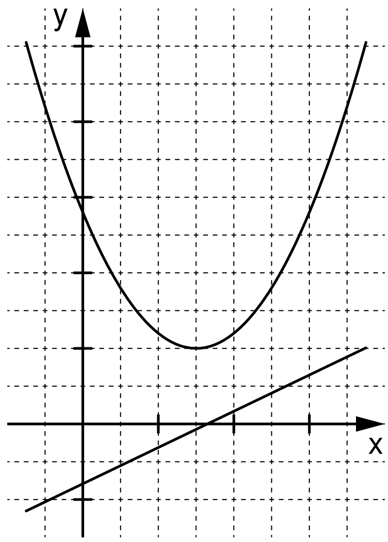
3.2 Formen von Systemen quadratischer Gleichungen – graphische Veranschaulichung

Schnitt Parabel/Gerade
(eine quadratische und eine lineare Gleichung)

Beispiel:
$$\begin{array}{|ll} & y = x^2 - 2x - 1 \\ \wedge & y = -x + 1 \\ \hline \end{array}$$

$x^2 - 2x - 1 = -x + 1 \quad \vert +x-1$	Rechtsterme gleichsetzen (Gleichsetzungsverfahren)	
$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$ ... $x = -1 \quad \vee \quad x = 2$	Lösen der quadratischen Gleichung	
$y = -(-1) + 1 = 2 \quad \vee \quad y = -2 + 1 = -1$ $\Rightarrow L = \{(-1\vert 2);(2\vert -1)\}$	Berechnen von y durch Einsetzen	

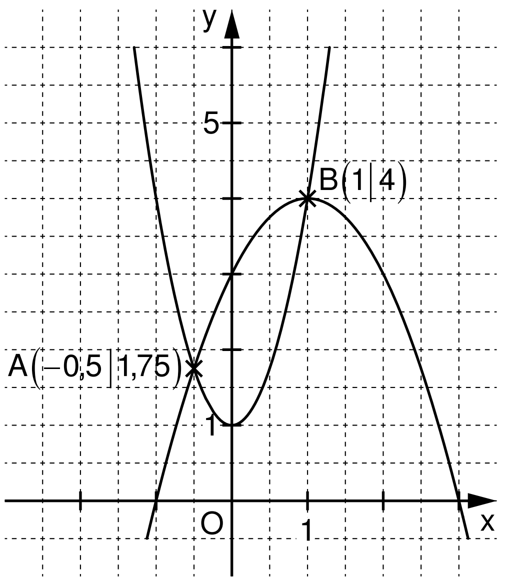
Mögliche Lösungsmengen (graphische Veranschaulichung):

Die Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten.	Die Gerade berührt die Parabel in einem Punkt.	Die Gerade schneidet oder berührt die Parabel nicht.
		
$L = \{(x_1\vert y_1);(x_2\vert y_2)\}$ zwei Lösungen	$L = \{(x_B\vert y_B)\}$ eine Lösung	$L = \{\ \}$ keine Lösung

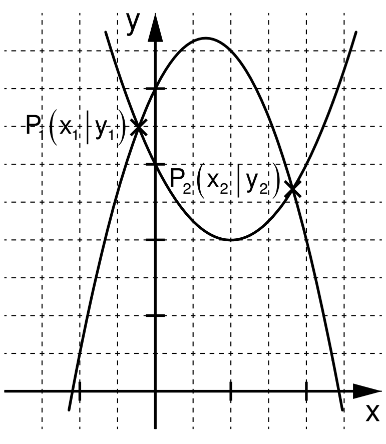
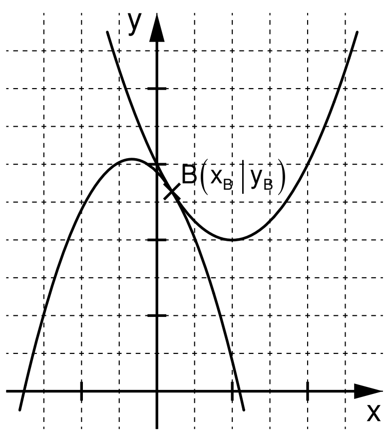
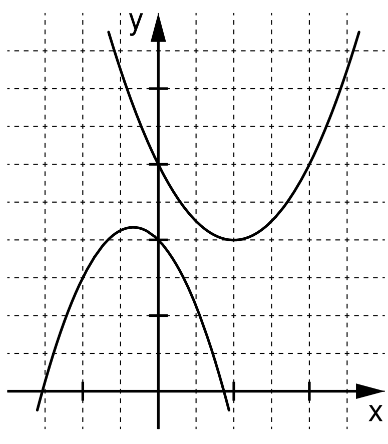
Schnitt Parabel/Parabel
(zwei quadratische Gleichungen)

Beispiel:

$$\begin{array}{l|l} & y = 3x^2 + 1 \\ \wedge & y = -x^2 + 2x + 3 \end{array}$$

<table>
<tr><td>$3x^2 + 1 = -x^2 + 2x + 3 \quad \big| -3x^2 - 1$</td><td>Rechtsterme gleichsetzen (Gleichsetzungs-verfahren)</td><td rowspan="3">
</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow \quad 0 = -4x^2 + 2x + 2$
...
$x = -0{,}5 \quad \vee \quad x = 1$</td><td>Lösen der quadratischen Gleichung</td></tr>
<tr><td>$y = 3 \cdot (-0{,}5)^2 + 1 = 1{,}75$
$\vee \quad y = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$
$\Rightarrow L = \{(-0{,}5 \mid 1{,}75);(1 \mid 4)\}$</td><td>Berechnen von y durch Einsetzen</td></tr>
</table>

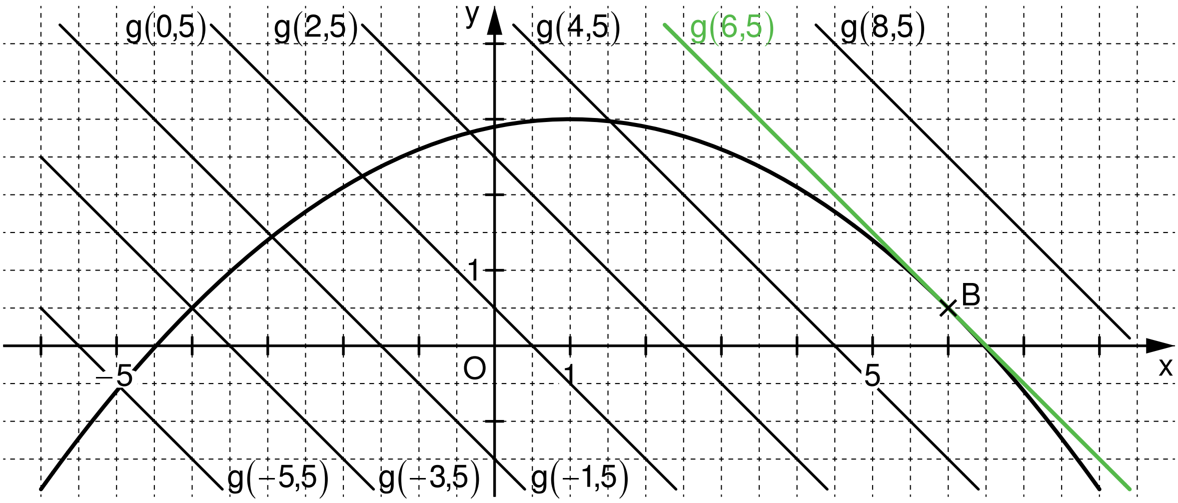
Mögliche Lösungsmengen (graphische Veranschaulichung):

<table>
<tr><td>Die Parabeln schneiden sich in zwei Punkten.

</td><td>Die Parabeln berühren sich in einem Punkt.

</td><td>Die Parabeln schneiden oder berühren sich nicht.

</td></tr>
<tr><td>$L = \{(x_1 \mid y_1);(x_2 \mid y_2)\}$
zwei Lösungen</td><td>$L = \{(x_B \mid y_B)\}$
eine Lösung</td><td>$L = \{\ \}$
keine Lösung</td></tr>
</table>

3.3 Tangentialprobleme bei Parallelenscharen

Beispiel:

Gegeben sind die Parabel $p: y = -0{,}1x^2 + 0{,}2x + 2{,}9 \; (x, y \in \mathbb{R})$ sowie die Parallelenschar $g(t):\; y = -x + t \; (t, x, y \in \mathbb{R})$.



$\begin{array}{ll} & y = -0{,}1x^2 + 0{,}2x + 2{,}9 \\ \wedge & y = -x + t \end{array}$	
$-0{,}1x^2 + 0{,}2x + 2{,}9 = -x + t \quad \vert +x - t$	Rechtsterme gleichsetzen (Gleichsetzungsverfahren)
$\Leftrightarrow \quad -0{,}1x^2 + 1{,}2x + 2{,}9 - t = 0$ $a = -0{,}1$ $b = 1{,}2$ $c = 2{,}9 - t$ $D = 1{,}2^2 - 4 \cdot (-0{,}1) \cdot (2{,}9 - t)$	Bilden der Diskriminante
$1{,}2^2 - 4 \cdot (-0{,}1) \cdot (2{,}9 - t) = 0$	Tangentenbedingung: $D = 0$
... $\Leftrightarrow \quad t = 6{,}5 \qquad L = \{6{,}5\}$	Lösen der entstandenen Gleichung
Tangente an die Parabel: $g(6{,}5):\; y = -x + 6{,}5$	Einsetzen von t in die Gleichung der Parallelenschar
$-0{,}1x^2 + 1{,}2x + 2{,}9 - 6{,}5 = 0$ ... $x_B = \dfrac{-1{,}2}{2 \cdot (-0{,}1)} = 6$ $y_B = -6 + 6{,}5 = 0{,}5 \qquad B(6 \vert 0{,}5)$	Ermitteln der Koordinaten des Berührpunktes B durch Lösen der quadratischen Gleichung aus Schritt 1 für $t = 6{,}5$

3.4 Wurzelgleichungen

Gleichungen mit Variablen im Radikanden heißen Wurzelgleichungen. Gegebenenfalls muss die Definitionsmenge D für die Variablen bestimmt werden.

Beispiele $(x \in \mathbb{R})$**:**

a)

$$3+\sqrt{x}=5 \quad \big|-3 \qquad D=\mathbb{R}_0^+$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}=2 \quad \big|^2$$

$$\Rightarrow \quad x=4$$

Probe: $3+\sqrt{4}=3+2=5$ (w)

$L=\{4\}$

b)

$$\sqrt{x+5}=x-1 \quad \big|^2 \qquad D=\{x \mid x \geq -5\}$$

$$\Rightarrow \quad x+5=(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x+5=x^2-2x+1 \quad \big|-x-5$$

$$\Leftrightarrow \quad 0=x^2-3x-4 \quad \big|-x-5$$

Lösen der quadratischen Gleichung liefert: $x=-1 \quad \vee \quad x=4$

Probe: $\sqrt{-1+5}=-1-1 \quad \Rightarrow \quad 2=-2$ (f)

$\sqrt{4+5}=4-1 \quad \Rightarrow \quad 3=3$ (w)

$L=\{4\}$

c)

$$\sqrt{x+5}=\sqrt{18-x} \quad \big|^2 \qquad D=\{x \mid -5 \leq x \leq 18\}$$

$$\Rightarrow \quad x+5=18-x$$

...

$$\Leftrightarrow \quad x=6{,}5$$

Probe: $\sqrt{6{,}5+5}=\sqrt{18-6{,}5} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{11{,}5}=\sqrt{11{,}5}$ (w)

$L=\{6{,}5\}$

Daten und Zufall

1 Das empirische Gesetz der großen Zahlen

Bei einem Zufallsexperiment kann die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis näherungsweise bestimmt werden, indem das Zufallsexperiment unter denselben Bedingungen mit einer genügend großen Anzahl an Wiederholungen durchgeführt wird.

Beispiel: Ein Spielwürfel wird 20-mal geworfen. Dabei erhält man viermal die Augenzahl 3.

Relative Häufigkeit: $\frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 20\%$

Dabei nähert sich der gemessene Wert für die relative Häufigkeit immer mehr dem theoretisch ermittelten Wert für die Wahrscheinlichkeit an, je größer die Anzahl der Wiederholungen wird.

Beispiele:

a) Ein Spielwürfel wird 10 000-mal geworfen.
Dabei erhält man 1641-mal die Augenzahl 3.

Relative Häufigkeit: $\frac{1641}{10000} = 16{,}41\%$

Theoretisch ermittelte Wahrscheinlichkeit P für das Werfen der Augenzahl 3: $P(3) = \frac{1}{6} = 16{,}\overline{6}\,\%$ (einer von sechs Fällen)

b) Ein Reißnagel wird 10 000-mal geworfen.
Dabei landet er 6238-mal auf der Seite.

Relative Häufigkeit: $\frac{6238}{10000} = 62{,}38\,\%$

Als Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit P kann man die relative Häufigkeit annehmen.

2 Begriffe

Jeden möglichen Ausgang bei der Durchführung eines Zufallsexperiments nennt man **Ergebnis**. Die Menge aller möglichen Ergebnisse heißt **Ergebnisraum** Ω.	Beispiel: Werfen eines Spielwürfels Ergebnisse: Würfeln einer 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Ergebnisraum: $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
Ein oder mehrere Elemente des Ergebnisraums bilden ein **Ereignis**. Die restlichen Ergebnisse gehören zum zugehörigen **Gegenereignis**.	„Die Augenzahl ist gerade.“ $\Rightarrow \{2;4;6\}$ „Die Augenzahl ist ungerade.“ $\Rightarrow \{1;3;5\}$ Die Elemente eines Ereignisses und des zugehörigen Gegenereignisses bilden zusammen den Ergebnisraum!

3 Laplace-Experiment

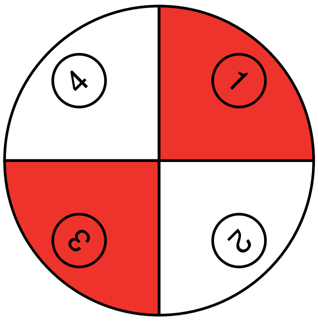
Ein **Laplace-Experiment** ist ein Zufallsexperiment, bei dem alle möglichen Ergebnisse dieselbe Wahrscheinlichkeit haben.

Die Wahrscheinlichkeit P für ein bestimmtes Ereignis berechnet sich dann wie folgt:

$$P = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}.$$

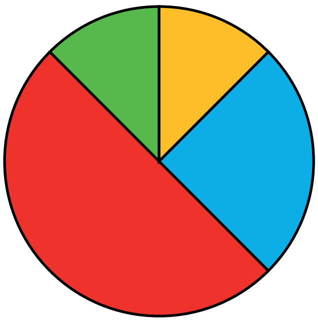
Beispiele: a) Laplace-Experimente:

- Werfen eines gewöhnlichen Spielwürfels
- Werfen einer Münze
- Drehen an einem Glücksrad mit gleich großen, unterscheidbaren Feldern

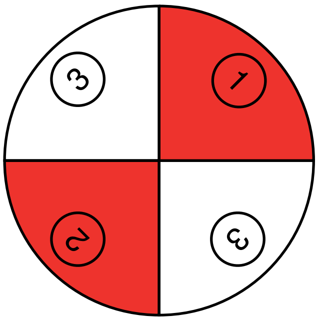


b) Keine Laplace-Experimente:

- In einer Urne befinden sich fünf rote und drei grüne Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen.
  → Es ist wahrscheinlicher, eine rote Kugel zu ziehen!
- Das abgebildete Glücksrad wird gedreht:
  → Es ist wahrscheinlicher, das rote Feld zu treffen als die anderen!



- Das abgebildete Glücksrad wird gedreht:
  → Es ist wahrscheinlicher, ein weißes Feld mit 3 zu treffen als die anderen!



4 Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei bekannten Anteilen

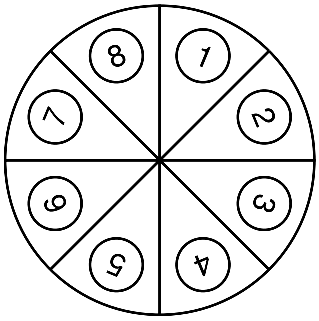
Beispiele: a) In einer Lostrommel sind 500 Lose. Die Hälfte der Lose sind Nieten. 20 % des Restes sind Gewinne, die restlichen Lose sind Trostpreise.

$\Rightarrow$ 250 von 500 Losen sind Nieten.
20 % von 250 sind 50, also sind 50 von 500 Losen Gewinne.
200 von 500 Losen sind Trostpreise

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das erste gezogene Los

- ein Gewinn? $P(\text{Gewinn}) = \frac{50}{500} = 0{,}1 = 10\,\%$
- eine Niete? $P(\text{Niete}) = \frac{250}{500} = 0{,}5 = 50\,\%$
- ein Trostpreis? $P(\text{Trostpreis}) = \frac{200}{500} = 0{,}4 = 40\,\%$
- keine Niete? $P(\text{keine Niete}) = \frac{50+200}{500} = 0{,}5 = 50\,\%$

b) An dem Glücksrad wird gedreht.



Wie groß ist beim einmaligen Drehen die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

- „Man erhält die 7“?

  $P(7) = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\,\%$ (eine von acht Möglichkeiten)
- „Man erhält eine gerade Zahl“?

  $P(\text{gerade Zahl}) = \frac{4}{8} = 0{,}5 = 50\,\%$ (vier von acht Möglichkeiten)
- „Man erhält eine Primzahl“?

  $P(\text{Primzahl}) = \frac{4}{8} = 0{,}5 = 50\,\%$ (vier von acht Möglichkeiten)
- „Man erhält entweder die 2 oder die 5“?

  $P(2 \text{ oder } 5) = \frac{2}{8} = 0{,}25 = 25\,\%$ (zwei von acht Möglichkeiten)